

Melnikov-Methode und Übergang zu chaotischem Verhalten beim Euler-Kreisel in Cardanischer Aufhängung

Alexander Erlich

1. Gutachter: Prof. Dr. P. Richter 2. Gutachter: Prof. Dr. G. Czycholl

26. August 2010

1 Analyse des ungestörten Systems

- Gestörte und ungestörte Bewegung
- Ziel der Arbeit
- Bifurkationsdiagramm und Separatrix

2 Quantifizierung des Chaos

- stabile und instabile Mannigfaltigkeiten
- Distanzmaß

3 Melnikov-Methode

- näherungsweise Distanzmessung
- Veranschaulichungen der Mannigfaltigkeiten

- normierte Trägheitsmomente: α, β, γ Rahmen-Einfluss: ρ

$$\text{Normierung: } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

-
- Euler-Kreisel *ohne* Rahmen: stets integrabel
 - Euler-Kreisel *mit* Rahmen: integrabel wenn Symmetrie $\alpha = \beta$

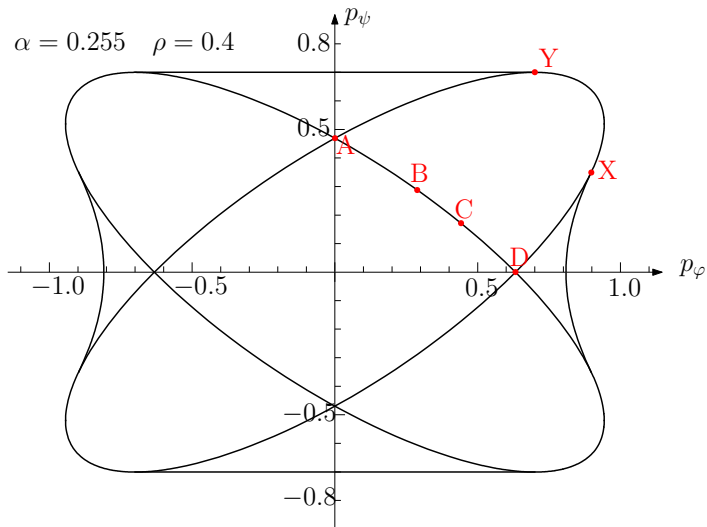
-
- Störung der Symmetrie: $\beta = \alpha(1 + \varepsilon)$ ε : Störparameter

Ziel der Arbeit

Untersuchung des Übergangs ins Chaos bei Variation von ρ, ε

Bifurkationsdiagramm

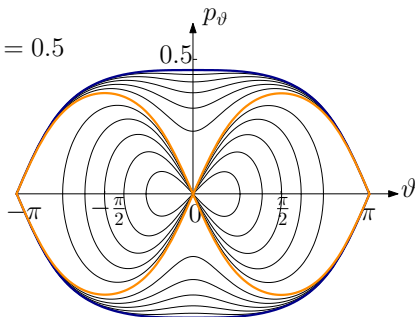
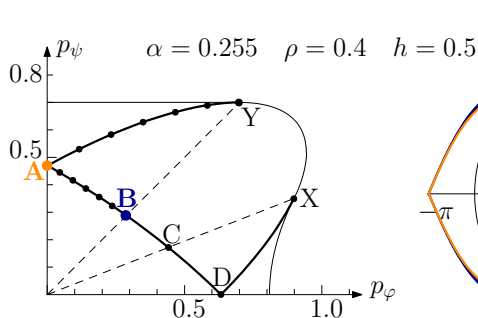
System von Grenzen im Raum der Erhaltungsgrößen h , p_φ , p_ψ



Bifurkationsdiagramm und Separatrix

Separatrix:

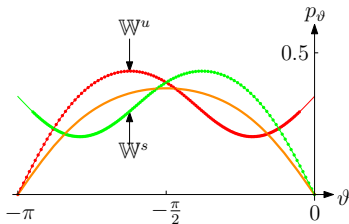
- Trajektorie, die von Potentialmaximum ausgeht und wieder dorthin zurückkehrt
- separiert (im Phasenraum) oszillierende von rotierender Bewegung



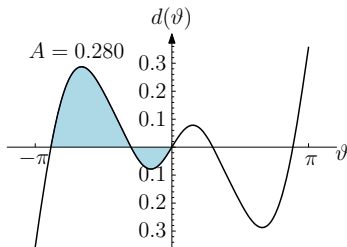
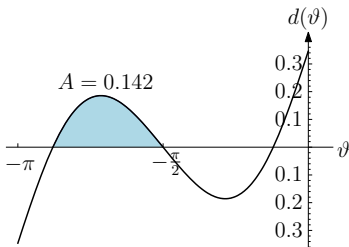
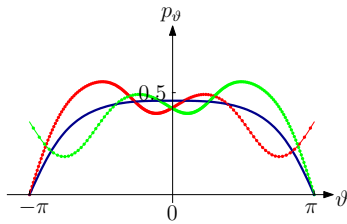
stabile und instabile Mannigfaltigkeiten

Quantifizierung des Chaos: Fläche zwischen \mathbb{W}^u und \mathbb{W}^s

Bif.-Diag.: A

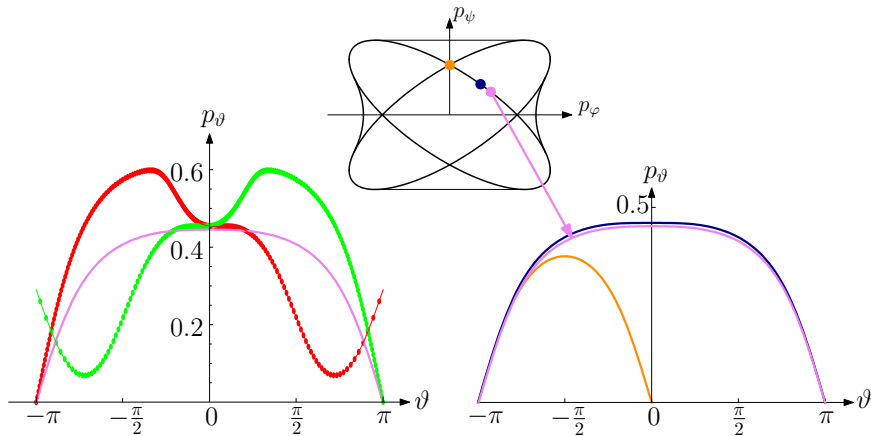


Bif.-Diag.: B



$\varepsilon = 0.5$ $\alpha = 0.255$ $\rho = 0.4$ $h = 0.5$

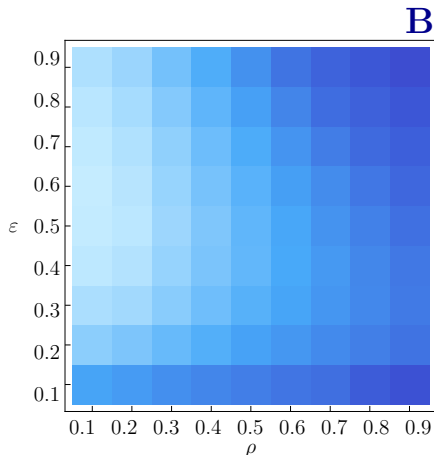
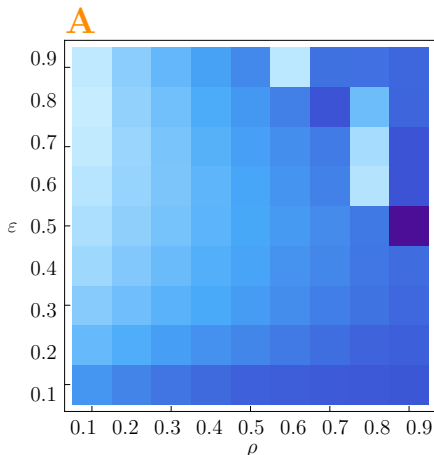
Gabelung zwischen einem und drei Schnittpunkten von \mathbb{W}^u und \mathbb{W}^s (bei $-\pi < \vartheta < \pi$)



Bif.-Diag.: $l_\varphi = 0.35$ $\varepsilon = 0.5$ $\alpha = 0.255$ $h = 0.5$ $\varepsilon = 0.5$ $\rho = 0.5$

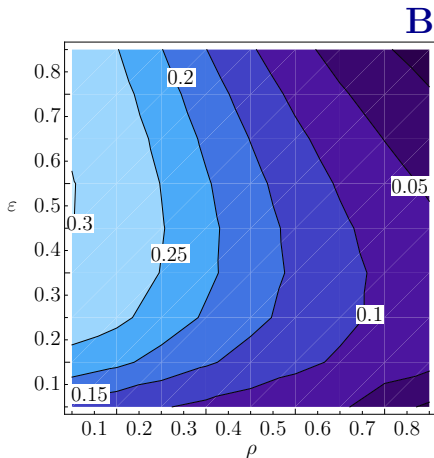
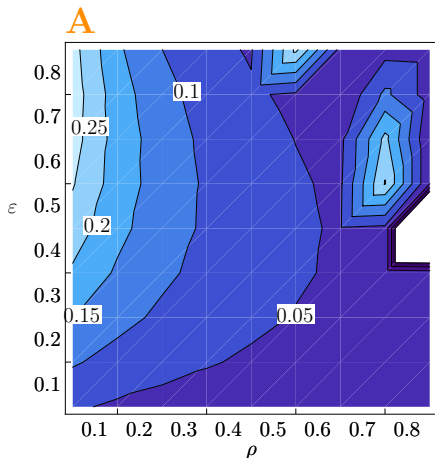
Distanzmaß: diskrete Daten

$$H = F + \varepsilon G = \frac{p_\vartheta^2}{2\alpha} + \frac{p_\psi^2}{2\gamma} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2(\rho + \alpha \sin^2 \vartheta)} + \varepsilon G$$



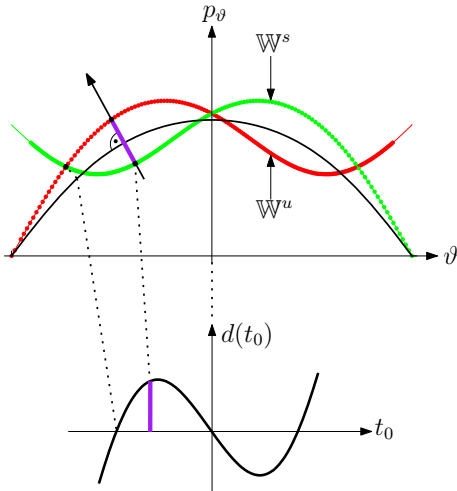
Distanzmaß: Contourplot

$$H = F + \varepsilon G = \frac{p_\vartheta^2}{2\alpha} + \frac{p_\psi^2}{2\gamma} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \vartheta)^2}{2(\rho + \alpha \sin^2 \vartheta)} + \varepsilon G$$



Melnikov-Methode

Störungstheoretische Methode für näherungsweise Distanzmessung zwischen \mathbb{W}^u und \mathbb{W}^s



genähertes Distanzmaß:

$$d(t_0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{M(t_0)}{\|\nabla \mathbf{q}_0(-t_0)\|} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

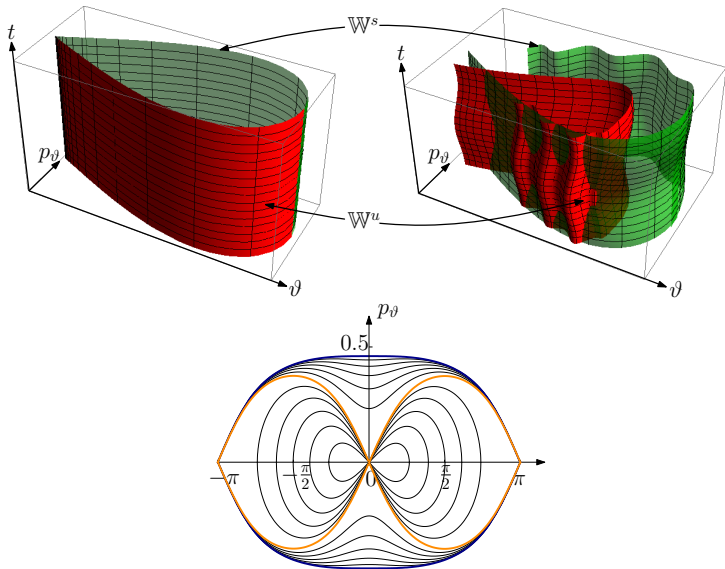
Melnikov-Funktion

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\mathbf{q}_0(t-t_0)), \\ G(\mathbf{q}_0(t-t_0))\} dt$$

Separatrix: $\mathbf{q}_0(t) = (\vartheta(t), p_\vartheta(t))^T$

Hamilton-Funktion: $H = F + \varepsilon G$

Mannigfaltigkeiten in 3D; numerische Distanzmessung

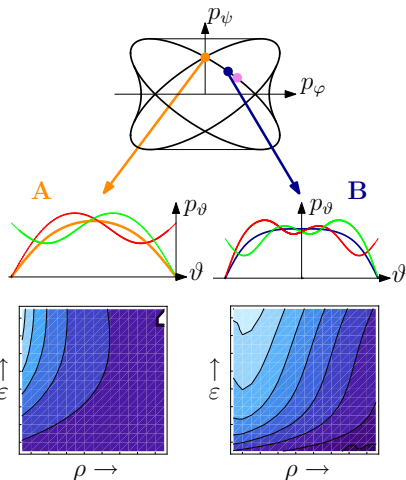


Zusammenfassung

- chaotisches Verhalten:
Distanzmaß zw. \mathbb{W}^u und \mathbb{W}^s
- homokline Bifurkationen nahe C
- Erkenntnis: Erhöhung von ρ
führt zu *weniger* Chaos
- Distanzmessung im Sinne von
Melnikov: rein numerisch

Ausblick / weitere Möglichkeiten

- „halb-analytische“
Melnikov-Analyse:
Geschwindigkeitsvorteil?
- Rolle der homoklinen
Bifurkationen?



Verwendete Literatur I



J. Guckenheimer and P. Holmes.

Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.

Copernicus, 1990.



P.H. Richter and K. Finke.

Cardan-mounted Euler and Lagrange tops I: bifurcations of invariant sets.

noch nicht publiziert, 2010.



S. Wiggins.

Chaotic transport in dynamical systems.

Springer, 1992.

ungestörtes System ($\varepsilon = 0$)

kinetische Energie ($\alpha \neq \beta$), Hamilton-Funktion ($\alpha = \beta$)

kinetische Energie ($\alpha \neq \beta$), $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ -Raum

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2}\alpha \left(\dot{\phi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi \right)^2 \\ & + \frac{1}{2}\beta \left(\dot{\phi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi \right)^2 \\ & + \frac{1}{2}\gamma (\dot{\phi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}\rho \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Hamilton-Funktion ($\alpha = \beta$), (\mathbf{q}, \mathbf{p}) -Raum

$$H = \frac{p_{\vartheta}^2}{2\alpha} + \frac{p_{\psi}^2}{2\gamma} + \frac{(p_{\phi} - p_{\psi} \cos \vartheta)^2}{2(\rho + \alpha \sin^2 \vartheta)}$$

Bifurkationsdiagramm: alle Punkte für Animationen

